Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Departamento de Física

Ondas Gravitacionales

Monografía como requisito parcial para optar por el título de grado en Física

Autor: Carlos Andrés Páramo Rojas

201520407

Director:

Marek Nowakowski

15 de enero de 2021

Agradecimientos

Dedico esta monografía especialmente a mi madre Rosalía por su paciencia y sacrificio. También a mi papá, hermanos, abuelos, amigos y demás familiares por su compañía y amor. También quiero dedicarle esto a quienes estuvieron conmigo al inicio del pregrado pero hoy lamentablemente no están con nosotros.

Quisiera agradecerle especialmente al profesor Marek Nowakowski quien ha tenido una inmensa paciencia en este trabajo, un gran maestro que me acompañó y motivó en los momentos más dificiles.

Resumen

La presente monografía, de manera recopilatoria, busca entender y estudiar diversos aspectos relacionados al fenómeno de las ondas gravitacionales. Esto implica derivar y demostrar las propiedades ondulatorias del espacio-tiempo, estudiar sus propiedades como su polarización, energía-momento. Se evidenciarán las similitudes de estas ondas con las tratadas en el electromagnetismo. Además entender las incidencias de dichas ondulaciones en el movimiento de la partícula mostrando un modelo simplificado que revela comportamientos distintos entre la influencia sobre una partícula puntual a una con dimensiones. Por último, también se estudiarán sucesos históricos y formas de medición directas o indirectas de este fenómeno.

Abstract

This thesis, in a compilation way, seeks to understand and study various aspects related to the phenomenon of gravitational waves. This involves deriving and demonstrating the wave properties of space-time, studying its properties as its polarization, energy-momentum. The similarities of these waves with those treated in electromagnetism will be evident. He also understands the incidences of various undulations in the particle's movement, showing a simplified model that reveals different behaviors between the influence on a specific particle to one with dimensions. Finally, historical events and direct or indirect ways of measuring this phenomenon will also be studied.

Contenido

1. Introducción

Las ondas gravitacionales fueron predichas por Albert Einstein a principios del siglo XX como consecuencia de la Teoría General de la Relatividad [1]. Sin embargo, no fue sino hasta casi un siglo después, en 2015, que estas fueron comprobadas experimentalmente de manera directa por los laboratorios LIGO [2]. Por este motivo, antes del descubrimiento de LIGO, hubo mucha controversia alrededor de la existencia de estas ondas. De hecho, en muchas ocasiones, se puso en tela de juicio la validez y sostenibilidad de la teoría general de la relatividad, a causa de la ausencia de pruebas contundentes que validaran dichas predicciones [3].

Sin embargo, durante la segunda mitad del siglo XX hubo varias señales e indicios experimentales que sugerían la existencia de estas ondas, ya sea de manera indirecta o no. Entre estos casos se encuentran los del detector de Weber y del pulsar Hulse-Taylor. El primero, se trata del trabajo del Físico estadounidense Joseph Weber [4], quien construyó un detector en 1970 que, según él, era capaz de detectar señales de perturbaciones gravitacionales. En más de una ocasión afirmó haber registrado, en dos detectores idénticos distintos, señales concordantes a lo que serían ondas gravitacionales. Lamentablemente, dichos resultados no pudieron ser comprobados, lo que dejó a su trabajo sin validez alguna [5]. El segundo, trata del pulsar **PSR B1913+16** es en realidad un sistema binario compuesto por dos estrellas de neutrones, las cuales fueron descubiertas en 1974 por los profesores Russell Alan Hulse y Joseph Hooton Taylor, de la Universidad de Massachusetts Amherst [6]. Las cuales presentan una reducción en sus órbitas, dicho colapso orbital no concuerda con la pérdida de energía a causa de la emisión de ondas gravitacionales, por ende, las mediciones orbitales de este sistema sirvieron como una especie de test para las predicciones de las ondas gravitacionales [7]. Aun así, estas mediciones no sirvieron como prueba contundente para la existencia de las ondas gravitacionales, al tratarse de medidas indirectas de las mismas. Sin embargo, sentaron bases experimentales importantes para el posterior descubrimiento en la segunda década del siglo XXI.

Este trabajo se centrará en varias etapas. En primer lugar, se trabajará en el contexto histórico, buscando entender y estudiar el cómo el Pulsar Hulse-Taylor sirvió como test indirecto para la relatividad general. Por otro lado, se busca también entender y recrear las predicciones teóricas de las ondas gravitacionales, empezando por una perturbación en una métrica de Minkowski [8] y de ahí deduciendo la ecuación de onda. Esto, haciendo un paralelismo entre ondas gravitacionales y ondas. electromagnéticas. A partir de ahí se estudiarán las propiedades de estas ondas, propiedades como su polarización y vector Poynting. Finalmente, se buscará estudiar la cinemática de una partícula de prueba al atravesar zonas del espacio con perturbaciones espacio-temporales [9].

1.1. Relatividad General

A principios del siglo XX fue publicada la teoría especial de la relatividad, en la cual se solucionaba el problema de que las ecuaciones de Maxwell no se mantuvieran invariantes bajo transformaciones entre marcos inerciales. Esta teoría se basó en dos postulados fundamentales; el primero enuncia que las leyes de la física son las mismas independiente del marco de referencia inercial (MRI) en el que se realicen las mediciones. Y el segundo, fija a la velocidad de la luz como una constante en cualquier MRI. Esto supone ya un cambio de paradigma respecto a la mecánica clásica. Sin embargo, Einstein quiso ir más allá e incursionar en los marcos acelerados. Esto, en consecuencia, modificaría lo que se conocía hasta el momento en el ámbito de la gravitación. Finalmente, esto fue logrado no sino hasta una década después, en 1915, cuando fue publicada su teoría general de la relatividad.

En ella, ya no solo se hablaba de marcos de referencia inerciales (velocidad constante respecto a otros marcos) sino, de manera general, se habla de los marcos que tienen una cierta aceleración respecto a otros. Allí es cuando surgen conceptos como el del principio de equivalencia, el principio de covarianza generalizada y el de la curvatura espaciotemporal. Además, se trata a la gravedad, no como una interacción instantanea, sino como la curvatura del espaciotiempo mismo generado por la materia, cuya interacción viaja a la velocidad de la luz. Esta relación se puede evidenciar en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci o tensor de curvatura, y $T_{\mu\nu}$ el tensor Energía-momento, que es el que representa la materia o las fuentes de campo gravitacional tal como lo es un objeto cargado en el electromagnetismo, el cual funciona como fuente del campo eléctrico. Esto evidenciado claramente en la ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La ecuación de campo de Einstein es la que mejor representa la influencia que tiene la materia en la curvatura del espaciotiempo. Esta versión no toma en cuenta la constante cosmológica Λ dado que aún está sugeta a estudio, y su influencia solo es notable a escalas cosmológicas. Durante un siglo, el valor exacto de este parámetro ha sido un enigma ya que dependiendo de su valor, esta ecuación podría pasar de describir un universo estático a uno en expansión.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

De manera consecuente, en el presente trabajo se trabajará en principio con la ecuación de campo de un universo estático, o sea con $\Lambda = 0$.

2. Breve repaso del Electromagnetismo

El electromagnetismo es una de las ramas más importantes de la física. Esta se encarga de estudiar todo lo relacionado al magnetismo y la electricidad, el cómo estos dos fenómenos se conectan y las implicaciones que tienen en los sistemas físicos. El hecho de que la carga sea una propiedad muy común en el universo, hace que los fenómenos electromagnéticos sean casi que omnipresentes en casi cualquier objeto en estudio.
Sus efectos han sido fuente de mucho interés entre los humanos desde principios de la civilización. Los rayos en las tormentas eléctricas, o los efectos electroestáticos presentes en ciertos materiales al ser frotados, dejaban desconcerados a las personas que en ese tiempo no podían dar explicación a lo que veían, incluso relacionaban este tipo de fenómenos a la magia o a la interveción de seres superiores. Hoy en día, luego de estudiar por muchos siglos estos fenómenos, sabemos que estos fenómenos están lejos de ser representaciones de la furia de un dios, sino que son producto de unas mecánicas mucho más complejas y misteriosas. Ahora tenemos un gran conocimiento acerca de las interacciones electromagnéticas, por ejemplo, sabemos que la luz está compuesta por partículas sin masa llamadas fotones, y que estas a su vez tienen comportamientos de onda.

2.1. Gauge fixing y potencial retardado

En el presente trabajo el tema principal son las ondas gravitacionales, aunque es importante resaltar el interesante paralelismo que pueden tener el electromagnetismo y la gravitación. De aquí, debemos recordar los pilares fundamentales la teoría electromagnética, las ecuaciones de Maxwell.

1.	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	2.	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
3.	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	4.	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ el campo magnético, $\vec{J}$ la densidad de corriente producto de las cargas libres, ρ la densidad de carga, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío y ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío. Estas ecuaciones las podemos comprimir en forma tensorial. Esta expresión es conocida como el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$. El cual se relaciona con el potencial vector A^{μ} de la siguiente manera.

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{2}$$

Donde A^{ν} es el Four-potential, que se define como:

$$A^{\nu} = (\phi, \vec{A})$$

Donde ϕ es el potencial eléctrico ($\vec{E} = -\nabla\phi$), y $\vec{A}$ es el potencial vector electromagnético ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$). Por otro lado. siendo fieles al principio de invariancia física, se puede comprobar que esta expresión es físicamente correcta si, al realizar transformaciones, mantiene su forma. Para este caso lo comprobaremos con una transformación Gauge para A^{ν} de la siguiente manera:

$$A^{\nu} \rightarrow A'^{\nu} = A^{\nu} + \partial^{\nu}\chi$$

Donde χ es la función gauge[10]. Además, tenemos como condición principal:

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$$

Vista de otra forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{3}$$

En unidades naturales, de donde se puede deducir una expresión más generalizada para campo eléctrico en caso de influencias de un campo magnético, o potencial vector:

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Ahora, tomando la ley de Gauss y reemplazando E por la expresión anterior:

$$\nabla\cdot(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Distribuyendo:

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial(\nabla\cdot\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Luego recordando la ecuación 3, se puede reemplazar el término correspondiente al potencial vector $\vec{A}$ por uno que quede en términos del potencial eléctrico ϕ

$$-\nabla^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Lo cual se simplifica a:

$$\Box\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Ahora, de manera paralela se encontrará la expresión correspondiente al potencial vector. Para ello, se parte desde la ecuación Ampère-Maxwell y se reemplaza de igual manera de la que se hizo en la ley de Gauss.

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

Aquí por propiedad de los rotacionales sabemos que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Entonces:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \nabla(\frac{\partial \phi}{\partial t}) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial^2 t}$$

Aquí se puede observar que el primer término del lado izquierdo se anula con el segundo término del lado derecho al agruparlos y darse cuenta que formaban la condición de Gauge.

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial^2 t}$$

En consecuencia:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial^2 t} = \mu_0 \vec{J}$$

y simplificando

$$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{5}$$

Ahora, las expresiones 4 y 5 son ecuaciones ondulatorias inhomogéneas dependientes de las fuentes. Estas ecuaciones tienen como solución los conocidos potenciales retardados[11], los cuales son expresiones explícitas para $\phi(\vec{r}, t)$ y $\vec{A}(\vec{r}, t)$ cuando el sistema es dependiente del tiempo. Estas soluciones adoptan las siguientes formas:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\vec{r'}^3$$

y

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t_r)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dr'^3$$

Donde t_r es el tiempo retardado definido por la expresión:

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c}$$

2.2. Vector de Poynting

Ahora, como es de esperarse, en la naturaleza todo movimiento está asociado con una energía. En el caso de las ondas electromagnéticas, se puede encontrar una cantidad que expresa la energía de una onda a la vez que indica su dirección de propagación. Este vector se le conoce como 'Poynting vector' y se define como:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} \tag{6}$$

Ahora, se puede introducir el concepto de densidad de energía electromagnética u, y se define como:

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) \tag{7}$$

Donde, se representa como B^2 al producto punto de B consigo mismo, similar caso con E. esta cantidad se relaciona con el vector de Poynting mediante el teorema de Poynting el cual afirma que la variación a través del tiempo de la densidad de energía u es inversamente proporcional al ratio del trabajo hecho en una distribución de carga más el flujo de energía de este campo[11].

$$\frac{du}{dt} = -\nabla\vec{S} - \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{8}$$

3. Ecuacion de Onda en la Métrica de Minkowski

Luego de las primeras publicaciones que presentaron esta teoría, no se tardó en estudiar un fenómeno que es consecuencia directa de esta misma: Las ondas gravitatorias. La ecuación de onda puede ser derivada desde la misma ecuación de Einstein. Para esto primero debemos basarnos en ciertas condiciones, que viven dentro de la teoría del campo débil. Primero, se define una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ a la métrica $\eta_{\mu\nu}$, donde nos situamos en un espaciotiempo Minkowskiano.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{9}$$

Donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica resultante luego de la perturbación, y la métrica de Minkowski está definida como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Además, tomamos al módulo de la perturbación como muy grande ($h >> 1$), lo cual permite despreciar expresiones que estén a órdenes mayores o iguales a dos (2) de $h_{\mu\nu}$. En el momento, se va a trabajar en un espacio-tiempo donde tenemos 3 coordenadas espaciales y una temporal. Los índices pueden tomar valores tipo $i = 0, 1, 2, 3$, donde el primer índice será para referenciar la componente temporal de las matrices o tensores, y los otros tres índices indicarán cada una de las tres coordenadas espaciales. Ahora, debemos volver a las ecuaciones de Einstein, donde si aplicamos la métrica $g^{\mu\nu}$ a ambos lados obtenemos:

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}Rg_{\mu\nu} = \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

Donde, de ahora en adelante, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ y $c = 1$ por simplicidad. De esta manera, queda esta ecuación en términos de las trazas del tensor de Ricci, del tensor EM y de la métrica, que en este caso, $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$:

$$R - \frac{1}{2}(4)R = \kappa T$$

$$\Rightarrow R = -\kappa T$$

Por lo tanto, si volvemos e introducimos este resultado en las ecuaciones de Einstein (Ecuación 1), entonces obtemenemos lo siguiente:

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

De esta manera, definimos $S_{\mu\nu}$

$$S_{\mu\nu} \equiv \frac{R_{\mu\nu}}{\kappa} = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \tag{11}$$

3.1. Símbolos de Christoffel con perturbación

Como primer paso, debemos calcular la conexión afín, o símbolos de Christoffel, que tiene la forma:

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \tag{12}$$

Usando la ecuación 1.1 para evaluar la conexión afín, llegamos a la expresión:

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\alpha}(\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2) \tag{13}$$

Donde, por la suposición de arriba, podemos ignorar el término $\mathcal{O}(h^2)$. Además, por la forma de esta ecuación podemos ver que $\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}$ es de orden h. lo cual, a su vez nos permite despreciar los términos a orden dos o superior de los Christoffel. O sea, $\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\omega} \approx 0$. Esto nos es útil ya al calcular el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, que a su vez es la contracción del tensor de Riemann de la forma:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\gamma}_{\mu\gamma\nu}$$

Que en términos de la definición del tensor de Riemann:

$$R^{\gamma}_{\mu\gamma\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} - \partial_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}$$

Simplificando:

$$R^{\gamma}_{\mu\gamma\nu} \approx \partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} - \partial_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \tag{14}$$

Ahora, aproximando a cero los órdenes de h mayores o iguales a 2, y usando la ecuación 13 en la ecuación 14 llegamos a la expresión correspondiente a la aproximación a primer orden:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^{\rho}\partial_{\rho}h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\rho}_{\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}h^{\rho}_{\mu} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h^{\rho}_{\nu}) \tag{15}$$

Donde debemos recordar que el término $\partial^{\rho}\partial_{\rho}$ es el conocido D'Alambertiano. Y resulta en:

$$\frac{1}{2}(\Box h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\rho}_{\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}h^{\rho}_{\mu} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h^{\rho}_{\nu}) = -\kappa S_{\mu\nu} \tag{16}$$

Lo cual muestra que, como $S_{\mu\nu}$ está en términos de $T_{\mu\nu}$ y, en consecuencia la ecuación está en términos del orden más bajo de $h_{\mu\nu}$, quiere decir que el tensor EM es independiente de esta perturbación, lo cual nos deja que se satisface la condición de conservación:

$$\partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = 0$$

3.2. Transformación Gauge

Para tener solidez en esta teoría, debemos tener en cuenta que toda ley de la física debe ser invariante bajo transformaciones. Tal como se observó con las lecuaciones de Maxwell. Por esta razón, en primera instancia introducimos una transformación de coordenadas de tipo:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \tag{17}$$

Donde, el orden de ϵ^μ es el mismo que $h_{\mu\nu}$ y como:

$$g'^{\mu\nu} = \partial_\lambda x'^\mu \partial_\rho x'^\nu g^{\lambda\rho}$$

Donde $\eta'^\mu = \eta^\mu$, podemos llegar a que:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu \tag{18}$$

Lo cual sería esta perturbación bajo la transformación de coordenadas. Esto válido si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}$.

3.3. Harmonic coordinates condition

Ahora, en pro de simplificar los cálculos de manera conveniente, se puede trabajar en un sistema de coordenadas armónicas, en donde los simbolos de Christoffel satisfacen la siguiente condición:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \tag{19}$$

La cual, es análoga a la condición del Gauge de Lorentz en el electromagnetismo. En consecuencia, si aplicamos esta condicion a la ecuación 13 de la manera:

$$\eta^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\alpha}(\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) = 0$$

Se puede obtener la siguiente expresión:

$$\partial_\nu h^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\nu}_{\nu} \tag{20}$$

La cual actúa como una restricción. En el caso de que h^{ν}_{μ} no cumpla con esta ecuación, podremos suponer un h'^{ν}_{μ} que sí la cumpla, obteniendo de paso una expresión más general. Para que esto sea posible, se tiene que encontrar el $\epsilon_{\mu\nu}$ que sí satisfaga dicha expresión. Para esto, se reemplaza la perturbación h^{ν}_{μ} por su transformación h'^{ν}_{μ}:

$$\partial_\nu h'^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu h'^{\nu}_{\nu}$$

Lo que significa:

$$\partial_\nu(h^{\nu}_{\mu} - \partial^\nu \epsilon_\mu - \partial_\mu \epsilon^\nu) = \frac{1}{2}\partial_\mu(h^{\nu}_{\nu} - \partial^\nu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon^\nu)$$

A partir de este paso, se puede simplificar y resolver para $\epsilon_{\mu\nu}$, lo cual resulta en la condición para que la perturbación primada h'^{ν}_{μ} satisfaga la ecuación 20.

$$\partial_\nu \partial^\nu \epsilon_\mu = \partial_\nu h^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\nu}_{\nu} \tag{21}$$

Por ende, podemos tener que en general dichas perturbaciones cumplen la ecuación 20, el cual es un resultado relevante, ya que a partir de este se puede simplificar aún más la expresión 16. Ya que con esta condición, y aprovechando las propiedades de los índices mudos, se logra llegar a:

$$\partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} = -2\kappa S_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \tag{22}$$

Simplificado:

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \tag{23}$$

La cual es la forma de una ecuación de onda inhomogénea, donde el lado izquierdo es el D'Alambertiano de la perturbación, y al lado derecho se tiene un término de la energía asociado a una fuente.

Como cualquier ecuación diferencial inhomogénea, esta exppresión tiene dos tipos de soluciones igual de válidas, las cuales son la solución homogénea, y la solución particular. En este caso, análogo al electromagnetismo, la solución particular de la ecuación 23 adopta la forma de la solución para un potencial retardado ya que la ecuación diferencial posee la misma forma. Es decir, la solución para la perturbación se vería de la forma:

$$h_{\mu\nu} = 4G \int \frac{S_{\mu\nu}(x', t - |x - x'|)}{|x - x'|} d^3x' \tag{24}$$

Por otro lado, se tiene que hallar también una solución para la forma homogénea de la ecuación 23 o sea para:

$$\partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} = 0 \tag{25}$$

En donde, de manera general, las soluciones pueden adoptar la forma:

$$h_{\mu\nu} = A f(x) + c.c. \tag{26}$$

donde A, es una matriz de polarización y $f(x)$ una función indeterminada. Además, denotaremos el complejo conjugado del primer término como *c.c.*. Estudiar las soluciones de la ecuación homogénea brinda mucha información acerca de las ondas que viajan en el vacío, ya que esta suposición es acerca de un sistema en ausencia de fuentes.

3.4. Solución Homogénea: Ondas planas

Análogo al electromagnetismo, una solución conveniente para el estudio de estas ondas es la de ondas planas, ya que de manera no tan compleja puede decir mucho acerca de la cinemática y la propagación de dichas ondas. Esta solución tomaría la forma:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}e^{-ik_\lambda x^\lambda} + e*_{\mu\nu}\, e^{ik_\lambda x^\lambda} \tag{27}$$

Donde $e_{\mu\nu}$ es el componente $\mu - \nu$ del tensor de polarización, $e*_{\mu\nu}$ su complejo conjugado y k_λ es el número de onda en la coordenada correpondiete el índice λ. Cuya expresión satisface la ecuación 20 cuanto $k_\lambda k^\lambda = 0$. Además, como consecuencia también estos términos satisfacen:

$$k_\lambda e^\lambda_\gamma = \frac{1}{2}k_\gamma e^\lambda_\lambda \tag{28}$$

Para la construcción de esta solución, se asume al tensor $e_{\mu\nu}$ como simétrico, o sea:

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$$

Por otro lado, este tensor al aplicarsele un gauge como en la ecuación (17), se puede llegar a la siguiente expresión que muestra la forma del $e_{\mu\nu}$ ta que se mantenga invariante bajo transformaciones:

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \kappa_\mu\epsilon_\nu + \kappa_\mu\epsilon_\nu \tag{29}$$

Ahora, de la ecuación 28 se pueden derivar los componentes de la matriz $e_{\mu\nu}$, pero para ello, nuevamente por simplicidad de los cálculos, se va a suponer que la onda viaja sólo en dirección, en x^3. Esta suposición ya nos implica que $k^1 = k^2 = 0$, dado que la onda no viaja en dirección de alguna de las coordenadas x^1 o x^2. Además que $k^0 = -k^3 = k$. Consecuentemente, usando la ecuación 28 para $\lambda = 0$:

$$k_0 e^0_\gamma = \frac{1}{2} k_\gamma e^0_0$$

Se expande los términos con el índice λ:

$$k_0(e^0_0 + e^0_1 + e^0_2 + e^0_3) = \frac{1}{2}(k_0 + k_1 + k_2 + k_3)e^0_0$$

Luego, se compara a ambos lados y se igualan los términos semejantes:

$$k_0 e^0_0 = \frac{1}{2} k_0 e^0_0$$

Esta ecuación solo tiene una solución y es que ambos lados sean cero, como tenemos que $k_0 \neq 0$, implica directamente que $e^0_0 = 0$. Similarmente, también se puede hallar que $e^3_3 = 0$. Consecuentemente, se contruye la solución de las demás componentes con estas dos soluciones, así que, por ejemplo, si se reemplaza $\lambda = 0$ y $\gamma = 0$ en la ecuación 28:

$$k_0 e^0_3 = \frac{1}{2} k_3 e^0_0$$

Donde, como se sabe que $k^0 \neq 0$, que $-k^3 \neq 0$, y que $e^0_0 = 0$, de manera trivial se llega a que:

$$e_{00} = e_{03} = e_{30} = e_{33} = 0 \tag{30}$$

Luego, con base en estos resultados también se evidencia que los términos de la forma e_{i0} y e_{i3} también son nulos, y que en consecuencia, los términos simétricos e_{0i} y e_{3i} también se anulan. Lo que deja simplemente a los términos e_{11}, e_{12}, e_{21} y e_{22} como componentes no necesariamente nulas. Adicionalmente, por la simetría del tensor, se tiene que $e_{12} = e_{21}$. Y, por último, nuevamente en 28 evaluando en las soluciones ya obtenidas:

$$(k_0 e^0_\gamma + k_3 e^3_\gamma) = \frac{1}{2}(k_0 e^1_1 + k_0 e^2_2 + k_3 e^1_1 + k_3 e^2_2)$$

Se igualan los términos que están multiplicados por k_0, y como ya sabemos el valor del los términos de la forma e^0_γ

$$\frac{1}{2}(e^1_1 + e^2_2) = e^0_\gamma = 0$$

Lo que implica que $e_{22} = -e_{11}$ para finalmente, dejar a la matriz de polarización en términos solo de dos cantidades, lo cual es acorde a la polarización de ondas planas. Entonces, esta matriz $e_{\mu\nu}$ queda de la siguiente forma:

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, llamaremos $e_{11} = r$ y $e_{12} = s$, además de que el factor $k_\lambda x^\lambda = k(x^3 - t)$ (para aclarar las unidades, recordar que c=1) Por lo que ahora la solución homogénea para la perturbación $h_{\mu\nu}$ resulta:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & s & 0 \\ 0 & s & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik(x^3-t)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r* & s* & 0 \\ 0 & s* & -r* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-ik(x^3-t)} \tag{31}$$

Donde el segundo término es el complejo conjugado del primero. Lo que nos deja con el resultado de que la perturbación $h_{\mu\nu}$ es una cantidad compleja que tiene el comportamiento esperado para una función de onda.

4. Partícula en un espacio perturbado

Ahora, ya teniendo la solución homogénea, lo cual es lo mismo para la perturbación en el vacío, se puede modelar la ecuación de movimiento de una partícula a partir de la ecuación geodésica, la cual otorgaría el resultado de las derivadas covariantes por cada coordenada y, a partir de ahí, se podría evidenciar posibles afectaciones en la partícula puntual en su movimiento causadas por las perturbaciones espacio-temporales[9].

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{32}$$

Por simplicidad:

$$\frac{du^\sigma}{d\tau} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \tag{33}$$

Donde $u^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\tau}$.

Ahora, para conocer esta ecuación en este caso debemos primero evaluar los simbolos de Christoffel de la ecuación 34 con nuestra solución para $h_{\mu\nu}$ en el caso de ondas planas.

$$\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\alpha}(\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) \tag{34}$$

El calculo de esta ecuación se realizó para cada coordenada de manera independiente. Es decir, se hizo un cálculo para cada valor de $\sigma = 0, 1, 2, 3$.

Para $\sigma = 0$:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{0\alpha}(\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) \tag{35}$$

En donde es importante recordar la definición de la métrica de Minkowski, donde se evidencia que todos los términos fuera de la diagonal principal son nulos, lo que implica que sobrevive solo los términos de la forma $\eta^{\nu\nu} \neq 0$. Lo que implica:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{00}(\partial_\mu h_{0\nu} + \partial_\nu h_{\mu 0} - \partial_0 h_{\mu\nu}) \tag{36}$$

Lo que implica

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_0 h_{\mu\nu}) \tag{37}$$

Donde a partir de ahora, los índices μ y ν solo pueden tomar valores de 1 y 2, ya que en la definición de $h_{\mu\nu}$ son estos cuatro valores los únicos que no se anulan. Para el siguiente paso, se cree conveniente re definir el tensor de polarización como una cantidad compleja la cual consta de una parte real y una parte imaginaria.

$$e_{\mu\nu} = \rho_{\mu\nu} + i\gamma_{\mu\nu} \tag{38}$$

Lo cual deja a la perturbación como:

$$h_{\mu\nu} = (\rho_{\mu\nu} + i\gamma_{\mu\nu})e^{ik(x^3-t)} + (\rho_{\mu\nu} - i\gamma_{\mu\nu})e^{-ik(x^3-t)} \tag{39}$$

Y, en consecuencia, su derivada respecto a la coordenada x^0 resuta:

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = -2k[\rho_{\mu\nu}\sin(k(x^3-t)) - \gamma_{\mu\nu}\cos(k(x^3-t))] \tag{40}$$

Para finalmente:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = -k[\rho_{\mu\nu}\sin(k(x^3-t)) - \gamma_{\mu\nu}\cos(k(x^3-t))] \tag{41}$$

De manera identica se procede para la coordenada x^3, pero el resultado resulta ser el mismo salvo por un signo negativo. O sea:

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = k[\rho_{\mu\nu}\sin(k(x^3 - t)) - \gamma_{\mu\nu}\cos(k(x^3 - t))] \tag{42}$$

Por lo que, evidentemente en este resultado:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = -\Gamma^3_{\mu\nu} \tag{43}$$

Antes de pevaluar estos resultados en la ecuación geodésica, se procede a calcular los Christoffel correspondientes a $\sigma = 1$ y $\sigma = 2$.
En el primer caso:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{11}(\partial_\mu h_{1\nu} + \partial_\nu h_{\mu 1} - \partial_1 h_{\mu\nu}) \tag{44}$$

Como la perturbación no depende de las coordenadas x^1 ni x^2 y simplificando tomando en cuenta las propiedades de los índices mudos:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \partial_\mu h_{11} + \partial_\mu h_{21} \tag{45}$$

Que de manera expandida:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \partial_0 h_{11} + \partial_0 h_{21} + \partial_3 h_{11} + \partial_3 h_{21} \tag{46}$$

Pero, recordando la relación de la ecuación 43, vemos que este Christoffel se anula. Además, el caso del $\sigma = 2$ es exactamente el mismo, así que obtenemos que:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \Gamma^2_{\mu\nu} = 0 \tag{47}$$

4.1. Corolario

Ahora, con estos resultados nos es posible definir las ecuaciones geodésicas en cada una de las coordenadas:

$$\frac{du^1}{d\tau} = 0 \tag{48}$$

$$\frac{du^2}{d\tau} = 0 \tag{49}$$

$$\frac{du^3}{d\tau} = k[\rho_{\mu\nu}\sin(k(x^3 - t)) - \gamma_{\mu\nu}\cos(k(x^3 - t))]u^\mu u^\nu \tag{50}$$

$$\frac{du^0}{d\tau} = -k[\rho_{\mu\nu}\sin(k(x^3 - t)) - \gamma_{\mu\nu}\cos(k(x^3 - t))]u^\mu u^\nu \tag{51}$$

Ante este resultado, cabe aclarar que asumiendo las velocidades en las coordenadas x^1 y x^2 como cero, se llega a que todas las ecuaciones de movimiento se anulan, dejando así como una influencia nula de parte de las perturbaciones espacio-temporales sobre la partícula. Lo cual puede sonar algo desalentador en un principio, pero como se menciona en el libro de Torsten [9], se puede interpretar de la manera en la que en realidad no existe una modificación en la cinética de la partícula debido a que, al ser puntual, no debería sufrir ningún efecto ya que los efectos de dichas perturbaciones se referirían a modificaciones en los deltas de espacio tiempo. Es decir, al estar en reposo, para que un objeto pueda sentir efecto alguno, tendría que ser extensivo y no puntual.

De manera de adición, en una solución propuesta por Törsten a los términos de la matriz de polarización dejando a $e_{11} = h$ y $e_{12} = 0$[9] nos deja que todas las derivadas se anulan, lo cual suena incoherente al evaluar el ansatz $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, por lo que la validez de esta solución se evaluará y corregirá en un trabajo futuro.

5. Energía-momento de una perturbación gravitacional

En la física, incluyendo la rama que estudia la mecánica ondulatoria, los conceptos de energía y momento son importantes en los estudios de estos fenómenos, esto debido a que la energía de la onda puede verse relacionada con su velocidad de propagación, con su frecuencia y su longitud de onda. Como en el caso de la luz visible donde el color observado tiene relación con la energía de los fotónes. Ahora, como es de imaginar, en este caso son muy importantes estos conceptos, aunque ya expresados en el lenguaje de la gravitación mediante el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Pero, para esta oportunidad, tenemos que ir un poco más allá de la definición del tensor de energía momento, para poder diferenciar las cantidades asociadas a las fuentes gravitatorias de las cantidades propias del campo gravitatorio.

5.1. Deducción del Tensor $t_{\mu\nu}$

Para calcular este tensor en este caso particular, se recurre a la ecuación de Einstein, la cual tiene la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Cabe aclarar, que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ propio de esta expresión es el generalizado, y no solo es la expresión a primer orden calculada previamente. Por lo que, se puede separar de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} = R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(N)}_{\mu\nu} \tag{52}$$

Donde $R^{(N)}_{\mu\nu}$ denota la suma de todos los términos de órdenes superiores.

$$R^{(N)}_{\mu\nu} = R^{(2)}_{\mu\nu} + R^{(3)}_{\mu\nu} + R^{(4)}_{\mu\nu} + ...$$

Y, el término $R^{(1)}_{\mu\nu}$ es:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h^\rho_\rho - \partial_\rho \partial_\nu h^\rho_\mu - \partial_\rho \partial_\mu h^\rho_\nu)$$

Como fue calculado previamente. Para esta ocasión, buscando una solución más exacta, no se tomará a $h_{\mu\nu}$ como muy pequeña en todo el espacio, sino como una cantidad no despreciable que puede afectar de manera determinante a los valores de la energía y el momento de la onda. Así que, tomamos la ecuación de campo de Einstein (1.1) y le sumamos a ambos lados el término $R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu}$ [12]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu}$$

Ahora, pasamos lo dos tensores completos al lado derecho:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

Los términos adicionales al lado derecho podemos agruparlos de manera conveniente en forma de un nuevo tensor $t_{\mu\nu}$, el cual se define como:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}(R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) \tag{53}$$

Y reduciendo la expresión a:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$$

La cual es la ecuación de Einstein para los Ricci de primer orden. Esta forma es importante ya que nos permite evidenciar y diferenciar conceptualmente los tensores de energía-momento asociados a la fuente ($T_{\mu\nu}$) y al campo gravitatorio ($t_{\mu\nu}$)[9]. Para este estudio de ondas gravitacionales que, a la larga, son perturbaciones del campo gravitatorio, toma una gran relevancia este tensor $t_{\mu\nu}$, el cual tiene una particularidad y es estar en términos de factores con órdenes superiores de h. Por ello, ahora que tenemos una definición, vamos a 'pulirla' y ponerla en términos más adecuados a lo que estamos estudiando. Así que, en la ecuación (53) ezpandimos el $R_{\mu\nu}$ como en la expresión (52)

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}(R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} - R^{(1)}_{\mu\nu} - R^{(N)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(R^{(1)} + R^{(N)})g_{\mu\nu})$$

Aquí, es necesario hacer una reducción de orden y solo dejar los términos menores o iguales que 2 para hacer de $t_{\mu\nu}$ un término de orden 2. Por ello, reduciendo y cambiando el orden N por el orden 2 tenemos:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}(-\frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} - R^{(2)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(R^{(1)} + R^{(2)})g_{\mu\nu})$$

Ahora, recordando la definición de lo que es la traza del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, en términos de la versión contravariante de la métrica $g_{\mu\nu}$ para casos generales o de órdenes distintos a 1, o sea $R = g^{\gamma\omega}R_{\gamma\omega}$. Por otro lado, se elige de manera conveniente [12], que los índices de los términos de primer órden puedan ser subidos y bajados solamente por la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, como en $R^{(1)} = \eta^{\gamma\omega}R^{(1)}_{\gamma\omega}$. Para hacer esto posible necesitamos definir la versión contravariante de $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Adicionalmente, para casos muy pequeños que se presentarán al hacer el reemplazo anterior, o sea cuando hayan términos de Minkowski al cuadrado $(\eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\omega})$ multiplicados por un término de orden 1 en h, directamente los podemos despreciar. De esta manera, con todas estas condiciones, podemos simplificar aún más la expresión anterior y obtener:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}(\frac{1}{2}\eta^{\gamma\omega}R^{(2)}_{\gamma\omega}\eta_{\mu\nu} - R^{(2)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\gamma\omega}R^{(1)}_{\gamma\omega}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{\gamma\omega}R^{(1)}_{\gamma\omega}\eta_{\mu\nu}) \tag{54}$$

Pero, como gracias a la condición de coordenadas armónicas en la métrica $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, podemos saber que, a primer orden, $R^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, y que por ende podemos reducir más el tensor en cuestión.

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}(\frac{1}{2}\eta^{\gamma\omega}R^{(2)}_{\gamma\omega}\eta_{\mu\nu} - R^{(2)}_{\mu\nu}) \tag{55}$$

Esta expresión, ya adopta de manera interesante una versión a segundo orden de la ecuación de campo de Einstein:

$$R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\gamma\omega}R^{(2)}_{\gamma\omega}\eta_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}t_{\mu\nu} \tag{56}$$

A la par, podemos definir ahora el tensor de energía-momento general $\tau_{\mu\nu}$, el cual incluye ambas partes estudiadas.

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$$

La cual, tiene una importante incidencia en que, si se le aplica una derivada contravariante respecto a la coordenada x_ν, este término se anula gracias, nuevamente a la condición de coordenadas armónicas:

$$\partial^\nu \tau_{\mu\nu} = \partial^\nu (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0$$

Ahora, como estamos trabajando a segundo orden, nuestra definición del tensor de Ricci cambia un poco ahora tomando en cuenta los términos de orden h^2 que omitimos en los anteriores capítulos. Los términos de orden 2 que denotamos como $\mathcal{O}(2)$ ahora lucirían de la siguiente manera[9]:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h^{\alpha\gamma}(\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \partial_\gamma h_{\mu\nu} - \partial_\alpha \partial_\nu h_{\mu\gamma} - \partial_\mu \partial_\gamma h_{\alpha\nu}) + \Gamma^\gamma_{\kappa\gamma}\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma_{\kappa\alpha\nu}\Gamma^{\kappa\alpha}_\mu$$

Donde usamos:

$$\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h^\gamma_\nu + \partial_\nu h^\gamma_\mu - \partial^\gamma h_{\mu\nu})$$

Definición la cual está acotada a solamente ser de orden 1 de h, ya que, de no hacerlo, en la multiplicación con otro christoffel aparecerían varios términos de órdenes mayores a 2, términos que en este nivel es necesario ignorar. Así que, al reemplazar:

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} = &-\frac{1}{2} h^{\alpha\gamma}(\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \partial_\gamma h_{\mu\nu} - \partial_\alpha \partial_\nu h_{\mu\gamma} - \partial_\mu \partial_\gamma h_{\alpha\nu}) \\ &+\frac{1}{4}(\partial_\kappa h^\gamma_\gamma + \partial_\gamma h^\gamma_\kappa - \partial^\gamma h_{\kappa\gamma})(\partial_\mu h^\kappa_\nu + \partial_\nu h^\kappa_\mu - \partial^\kappa h_{\mu\nu}) \\ &-\frac{1}{4}(\partial_\alpha h_{\nu\kappa} + \partial_\nu h_{\kappa\alpha} - \partial_\kappa h_{\alpha\nu})(\partial^\alpha h^\kappa_\mu + \partial_\mu h^{\kappa\alpha} - \partial^\kappa h^\alpha_\mu) \end{aligned} \tag{57}$$

La cual es una expresión demasiado larga y compleja, que, sabiendo que tenemos que evaluar luego el resultado de $h_{\mu\nu}(x)$ encontrado en capítulos anteriores, este procedimiento sería innecesariamente complejo. Para este problema, el libro de Wienberg [12] recomienda hacer un promedio espacial del tensor $t_\mu \nu$ (Valor esperado). En otras palabras, es suponer que se evalúa la función en un espacio mucho mayor que la longitud $|k^{-1}|$, esto para poder aproximar a 1 todos los términos que contengan un exponente proporcional a $2k_\lambda x^\lambda$ ya que, a estas escalas, estas cantidades serían muy pequeñas. Esto servirá para simplificar la expresión anterior. Por ello, empezamos calculando la forma promedio de la expresión (57), o sea el $\langle R_{\mu\nu}\rangle$ y usando:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{-ik_\lambda x^\lambda} + e*_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda} \tag{58}$$

Que es nuestra solución homogénea a la función de onda. Además de recordar la relación (20):

$$2\partial_\nu h^\nu_\mu = \partial_\mu h^\nu_\nu$$

La cual es una implicación a

$$k_\lambda e^{\lambda\gamma} = \frac{1}{2} k^\gamma e^\lambda_\lambda \tag{59}$$

Por ende, haciendo el reemplazo (58) en (57) podemos comenzar a simplificar esta relación con los parámetros ya mencionados. Pero, como es un procedimiento algo largo, empezaremos por ver qué pasa en los productos de las distintas h. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} &= (e^{\mu\nu} e^{-ik_\lambda x^\lambda} + e*^{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda})(e_{\mu\nu} e^{-ik_\lambda x^\lambda} + e*_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda}) \\ &= (e^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + e^{\mu\nu} e*_{\mu\nu} + e*^{\mu\nu} e*_{\mu\nu} + e*^{\mu\nu} e_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Lo que, al saber que el tercer término es el negativo del primer valor, y que los otros dos valores son similares, se reduce a:

$$h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 2e^{\mu\nu}e{*}_{\mu\nu}$$

Pero, es evidente que este es un valor complejo, por lo que para efectos prácticos solo tomaremos en cuenta su parte real ignorando la imaginaria:

$$h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = Re[2e^{\mu\nu}e{*}_{\mu\nu}] \tag{60}$$

Por otro lado, es necesario recordar que la función $h_{\mu\nu}$ es una función exponencial, por lo que sus derivadas tendrán la siguiente relación:

$$\partial_\gamma h_{\mu\nu} \propto i\kappa_\gamma h_{\mu\nu}$$

Y en consecuencia:

$$\partial_\sigma \partial_\gamma h_{\mu\nu} \propto -\kappa_\sigma \kappa_\gamma h_{\mu\nu}$$

Por lo que, realizamos los anteriores reemplazos en (57):

$$\begin{aligned}\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle = Re[e *^{\alpha\gamma} & (\kappa_\mu\kappa_\nu e_{\alpha\gamma} + \kappa_\alpha\kappa_\gamma e_{\mu\nu} - \kappa_\alpha\kappa_\nu e_{\mu\gamma} - \kappa_\mu\kappa_\gamma e_{\alpha\nu}) \\ & + \frac{1}{2}(\kappa_\kappa e^\gamma_\gamma + \kappa_\gamma e^\gamma_\kappa - \kappa^\gamma e_{\kappa\gamma}) * (\kappa_\mu e^\kappa_\nu + \kappa_\nu e^\kappa_\mu - \kappa^\kappa e_{\mu\nu}) \\ & - \frac{1}{2}(\kappa_\alpha e_{\nu\kappa} + \kappa_\nu e_{\kappa\alpha} - \kappa_\kappa e_{\alpha\nu}) * (\kappa^\alpha e^\kappa_\mu + \kappa_\mu e^{\kappa\alpha} - \kappa^\kappa e^\alpha_\mu)]\end{aligned} \tag{61}$$

Viendo detalladamente, se puede dar cuenta de los siguientes casos, donde el primero:

$$\kappa_\kappa e *_{\alpha\nu} \kappa^\alpha e^\kappa_\mu = \frac{1}{4}\kappa_\mu\kappa_\nu e *^\alpha_\alpha e^\kappa_\kappa$$

Donde se aplica dos veces la propiedad (59). Y el segundo:

$$\kappa_\alpha e *_{\nu\kappa} \kappa^\alpha e^\kappa_\mu = 0$$

Satisfaciendo la propiedad $k_\lambda k^\lambda = 0$. Por lo tanto, con estas herramientas se puede simplificar la expresión (61) a:

$$\langle R^{(2)}_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2}\kappa_\mu\kappa_\nu e *^{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} - \frac{1}{4}\kappa_\mu\kappa_\nu |e^\gamma_\gamma|^2$$

Donde $|e^\gamma_\gamma|^2 = e^\gamma_\gamma e*^\alpha_\alpha$.

Ahora, para resolver, tomamos esta definición para reemplazarlo en la expresión para $t_\mu\nu$

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = -\frac{c^4}{8\pi G}(\frac{1}{2}\eta^{\gamma\omega}\langle R^{(2)}_{\gamma\omega}\rangle\eta_{\mu\nu} - \langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle)$$

Donde:

$$\eta^{\gamma\omega}\langle R^{(2)}_{\gamma\omega}\rangle = \eta^{\gamma\omega}\kappa_\gamma\kappa_\omega(...) = \kappa^\omega\kappa_\omega(...) = 0$$

Por ende,

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{c^4}{16\pi G}\kappa_\mu\kappa_\nu(e *^{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}|e^\gamma_\gamma|^2) \tag{62}$$

Para nuestro caso particular, en la solución matricial que obtuvimos en pasados capítulos, más exactamente en la ecuación (31) tenemos que el valor e^γ_γ se anula, y que el factor $e *^{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} = 2|r|^2 + 2|s|^2$ ya que debemos recordar que esa misma suma cuadrática se efectúa para ambas diagonales, y gracias a que la matriz $e_{\mu\nu}$ es simétrica, tendremos entonces:

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{c^4}{8\pi G} \kappa_\mu \kappa_\nu (|r|^2 + |s|^2) \tag{63}$$

La cual representa fielmente el tensor de energía-momento de la onda solamente, la cual como es esperado no es nula. Aspectos como los de la potencia irradiada en la onda se verán en el capítulo **6.1**

5.2. Invariancia de $t_{\mu\nu}$

Esta expresión al ser sometida a un cambio de coordenadas tipo

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$$

puede preservar su forma ya que quedará en términos del tensor de polarización que tiene como forma transformada como en la ecuación (29):

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \kappa_\mu \epsilon_\nu + \kappa_\nu \epsilon_\mu$$

Lo que deja:

$$e' *^{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} = e *^{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} + 2Re(\epsilon *_\alpha \kappa^\alpha e^\gamma_\gamma) + 2|\epsilon_\gamma \kappa^\gamma|^2 \tag{64}$$

y

$$e'^\gamma_\gamma = e^\gamma_\gamma + 2\kappa^\gamma \epsilon_\gamma \tag{65}$$

Entonces reemplazando en 62 quedaría como:

$$\langle t'_{\mu\nu} \rangle = \frac{c^4}{16\pi G} \kappa_\mu \kappa_\nu (e *^{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} + 2Re(\epsilon *_\alpha \kappa^\alpha e^\gamma_\gamma) + 2|\epsilon_\gamma \kappa^\gamma|^2 - \frac{1}{2}|e^\gamma_\gamma + 2\kappa^\gamma \epsilon_\gamma|^2)$$

Donde, si expandimos el segundo término nos queda:

$$\langle t'_{\mu\nu}\rangle = \frac{c^4}{16\pi G}\kappa_\mu\kappa_\nu(e*^{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma}+2Re(\epsilon*_\alpha\kappa^\alpha e^\gamma_\gamma)+2|\epsilon_\gamma\kappa^\gamma|^2-\frac{1}{2}|e^\gamma_\gamma|^2-2e^\gamma_\gamma\kappa^\gamma\epsilon_\gamma-2|\kappa^\gamma\epsilon_\gamma|^2)$$

El tercer y sexto término son obviamente semejantes por lo que podemos cancelarlos, mientras que el segundo y quinto también se pueden anular haciendo referencia a que el conjugado de ϵ es él mismo, así que nos queda:

$$\langle t'_{\mu\nu}\rangle = \frac{c^4}{16\pi G}\kappa_\mu\kappa_\nu(e*^{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma}-\frac{1}{2}|e^\gamma_\gamma|^2)$$

Por lo cual se muestra que nuestro $t_{\mu\nu}$ es invariante gauge.

6. Vestigios experimentales

Desde la predicción de las ondas gravitacionales a principios del siglo XX cuando la relatividad general vió la luz, siempre fue un gran problema el si quiera plantear experimentos capaces de observar dicho fenómeno. Esto, debido a que las condiciones para que se generen son algo extremas producto que, a comparación con las otras 3 fuerzas fundamentales (débil, fuerte, y electromegnética), las interacciones gravitacionales son relativamente más débiles y por tanto observar fenómenos gravitacionales ya requieren un nivel muy alto de precisión y sensibilidad en las mediciones.

Tal era la difcultad de este desafío que se demoró exactamente un siglo en comprobarse desde su predicción. Aunque este hecho no oculta todos los esfuerzos que hubo a lo largo de todo este tiempo, empezando por medidas indirectas hasta experimentos fallidos. Por ello, será importante no solo conocer sino saber en qué consistieron estos intentos y cuáles fueron sus logros en contribución a esta larga investigación.

6.1. Detector de Weber

Como ya se ha mencionado antes, Joseph Weber fue un Físico Experimental nacido en Estados Unidos y fue el primero en intentar diseñar un detector de ondas gravitacionales. Aunque sus mediciones no fueron concluyentes y no se logró comprobar la eficacia del detector (de hecho sus datos fueron duramente descartados) fue un primer acercamiento a la tecnología que se debía necesitar para medir y detectar dicho fenómeno. Además de desarrollar un avance importante en lo que fue la transición de las predicciones teóricas al desarrollo de la matemática y el estudio de las cantidades medibles asociadas a este fenómeno.
El trabajo de Weber se basó principalmente en el aprovechamiento de la teoría de la radiación Cuadrupolar, mediante las llamadas antenas de resonancia cuadrupolar. Si bien el desarrollo detallado de esta teoría no podrá ser realizado en este trabajo, se mencionarán los aspectos más relevantes del concepto y de cuáles serían en este

caso las cantidades medibles dentro de esta. Esta teoría funciona como una analogía directa con los cuadrupolos eléctricos[11]. El potencial de un cuadrupolo luce como:

$$V(\vec{r}) = -\frac{G}{2\vec{r}}\sum_{i,j} Q_{ij}n_i n_j$$

Donde Q_{ij} es el momento cuadrupolar, el cual se asocia a la densidad de masa[13]:

$$Q_{ij} = M(3x_i x_j - |x|^2\delta_{ij})$$

Mientras que la potencia radiada por un cuadrupolo se da por:

$$P = \frac{2G\omega^6}{5c^5}(\sum_{i,j=1}^{3} |Q_{ij}|^2 - \frac{1}{3}|\sum_{i=1}^{3} Q_{ij}|^2)$$

La importancia del estudio de un cuadrupolo gravitacional radica en que es un modelo teórico muy fiel para una fuente de radiación, en este caso sería una fuente de ondas gravitacionales. En este sentido, entender esta fuente y su radiación nos ayudarán a saber qué y cómo medirlo. Para el caso presente es necesario definir nuestro tensor de energía-momento como una transformada de Fourier, esto con el fin de poder transformar todas las funciones con las que estamos trabajando y que estas puedan estar en términos de variables oscilatorias como la frecuencia ω presente en los modelos cuadrupolares. Y que, en esta ocasión representaría la frecuencia a la que viaja la onda.

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \int_0^\infty T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega)e^{-i\omega t}d\omega + \int_0^\infty T^*_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{66}$$

Con esta definición, se puede llegar a que todas las funciones preservarán la misma forma, pero ahora no serán dependientes del tiempo t sino de la frecuencia como en:

$$S_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) - \frac{1}{2}T(\vec{x}, \omega)g_{\mu\nu}$$

En lo que buscaba Weber, era poder medir las ondas gravitacionales como cualquier otra onda conocida, así de una manera analógica a la mecánica cuántica con la sección eficaz en el experimento de Rutherford, quiso buscar una cantidad que actuase como una sección eficaz de dichas ondas. Por ello, primero que todo se buscó darle otra solución a para la función $h_{\mu\nu}$ la cual fuese coherente con una onda en el infinito (muy alejada de la fuente) que consistiera en una onda plana pero adicionándole un término asociado a la representación de una onda dispersada(scattering)[12]:

$$h_{\mu\nu} = [e_{\mu\nu}e^{ik_\lambda x^\lambda} + f_{\mu\nu}(\hat{x},\omega)\frac{e^{i\omega r}}{r}]e^{-i\omega t} \tag{67}$$

Donde la variable $\hat{x}$ es el vector unitario de la coordenada $\vec{x}$, r es la magnitud de este mismo vector, $r = |\vec{x}|$, y por último, aparece $f_{\mu\nu}$ que es la amplitud de disperción (scattering) la cual tiene la forma de:

$$f_{\mu\nu}(\hat{x}) = t_{\mu\nu}(\hat{x}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}t(\hat{x}) \tag{68}$$

Ahora, esta función hace parte de las definiciones de las potencias emitidas en términos de la teoría del scattering de ondas gravitacionales. Empezando por:

$$P_{tot} = \int \langle t^{0i}_{emi}\rangle \hat{x} r^2 d\Omega \tag{69}$$

Donde $\langle t^{0i}_{emi}\rangle$ representa el valor esperado del flujo de energía emitido. Este total de la potencia emitida se divide en tres partes $P_{tot} = P_{sca} + P_{plana} + P_{int} +$. Cada una representa la potencia de la parte dispersada de $h_{\mu\nu}$ (P_{sca}), la potencia de la parte de onda plana (P_{plana}) y la potencia asociada a la interferencia entre los dos tipos de ondas(P_{int}). La forma de la potencia plana y la de interferencia vienen a estar en términos de $f_{\mu\nu}$ de la siguiente manera, las cuales vienen de la ecuación 69:

$$P_{sca} = \frac{\omega^2}{16\pi G}\int [f^{*\mu\nu}(\hat{x})f_{\mu\nu}(\hat{x}) - \frac{1}{2}|f(\hat{x})|^2]d\Omega \tag{70}$$

y

$$P_{int} = -\frac{\omega}{4G}Im[e^{*\mu\nu}f_{\mu\nu}(\hat{\kappa}) - \frac{1}{2}e^{*\mu}_{\mu}f^{\mu}_{\mu}(\hat{\kappa})] \tag{71}$$

Ahora la definición del flujo de energía en la onda incidente[12] se da como:

$$\Phi = \langle t^{0i} \rangle \hat{\kappa}_i = \frac{\omega^2}{16\pi G}(e *^{\mu\nu} e_{\mu\nu} - \frac{1}{2}|e^{\mu}_{\mu}|^2) \tag{72}$$

De donde a partir podemos definir la sección eficaz asociada al Scattering[12]:

$$\sigma_{sca} = \frac{P_{sca}}{\Phi} \tag{73}$$

y de la sección eficaz total:

$$\sigma_{tot} = \frac{P_{sca} + P_{abs}}{\Phi} = -\frac{P_{int}}{\Phi} \tag{74}$$

Gracias al hecho de que la potencia absorbida se define como $P_{abs} = -P_{sca} - P_{int}$.

Ahora, con estas definiciones se tomaron en cuenta las propiedades de la antena, la cual consistía en diversos cilindros de aluminio de $2m$ de largo por $1m$ de diámetro[4], se pudo calcular la sección eficaz del detector[12]:

$$\sigma_{tot} = \frac{10\pi\eta c^2}{\omega^2}(\frac{\Gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4}) \tag{75}$$

Donde Γ es el ratio de pérdida de energía, η es un parámetro llamado "branching ratio"que para la antena de Weber vale $\eta = 3 \cdot 10^{-34}$ y ω_0 la frecuencia de resonancia que tiene un valor cercano a los $(1660Hz) \cdot 2\pi$.

En 1969, Weber afirmó haber hecho unas 100 mediciones que resultaban coincidentes, ya que puso dos de sus antenas separadas 1000km una de la otra. También afirmó que, por sus cálculos una gran mayoría eran provenientes del centro de la galaxia. De manera interesante, sus mediciones sí parecían ser muy acordes a la teoría, pero luego al querer revalidar sus mediciones en posteriores intentos no logró obtener dichos valores, poniéndolo en entre dicho por la comunidad científica. Por lo que su reclamo de haber sido la primera persona en medir radiación gravitacional no fue tomado en serio.

6.2. Hulse-Taylor: PSR B1913+16

En primer orden, se debe saber que una estrella de neutrones es una estrella con densidad de masa muy alta, debido a que es el resultado de un colapso gravitacional, esta obviamente se compone principalmente de neutrones y además de otros componentes pesados. Por otro lado, un pulsar es conocido como una estrella de neutrones rotante y magnetizada, esta estrella se caracteriza por tener frecuencias de rotación muy altas y por expulsar un haz de radiación electromanética desde cada uno de sus polos[14].

En el año 1974, los profesores Russell Alan Hulse y Joseph Hooton Taylor de la Universidad Massachusetts detectaron un pulsar de rápida rotación gracias a las mediciones obtenidas en el obserbatorio de Arecibo ubicado en norte de Puerto Rico [6]. Este hallazgo fue gracias al radiotelescopio de gran tamaño ubicado en esta locación, el cual posee aproximadamente uno $305m$ de Diámetro y tiene la capacidad de medir ondas de radio con longitudes de onda del orden de $1m$ [15].

Esta estrella detectada tuvo una medida de su masa de $1{,}44M_{\odot}$, además de tener la peculiaridad de tener una frecuencia de rotación muy alta, la cual es de 17 rotaciones por segundo, es decir que posee periodo de tan solo $59ms$ aproximadamente. Al tiempo que se detectó que este objeto emitía otra clase de pulsación un poco más irregular la cual poseía en promedio un periodo de $7{,}75h$[7]. Esta señal fue el primer indicio de la presencia de otro objeto masivo el cual esta estrella detectada rotaba. Mediciones posteriores confirmaron que esta señal adicional se trataba de otra estrella de neutrones, lo que evidenciaría que la señal detectada pertenece a un sistema binario. Este sistema fue bautizado como **PSR B1913+16**, aunque de manera más general, se refiere a este como el sistema binario Hulse-Taylor por sus decubirdores. El periodo orbital T_0 de este sistema se estimó de:

$$T_0 \approx 0{,}323d$$

Posteriormente, en las observaciones de Joseph Taylor y J. M. Wiesberg [16] del año 1981 se observó una pérdida de energía. Este hecho fue evidenciado en primera medida en una reducción progresiva del periodo orbital a un ratio de:

$$\frac{dT}{dt} \approx -2{,}42 \times 10^{-12}$$

En consecuentes estudios más detallados de Weisberg, Taylor y Folwer se observaron desviaciones en el tiempo que le tomaba a la estrella pasar por el periastron[7]. Dichas desviaciones fueron acordes a las predicciones teóricas derivadas de la relatividad para este sistema. Este hecho, si bien no fue una medida directa, dió validez a los estudios acerca de las ondas gravitacionales.

6.3. Búsqueda de LIGO

Otro concepto importante en la caracterización de este tipo de sistemas es la masa de chirrido $\mathcal{M}$ (Chirp Mass) la cual determina la evolución de un sistema binario debido a la pérdida de energía producto de la radiación gravitacional[2], esta tiene forma de:

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \tag{76}$$

La cual es una caracterización dependiente netamente de las masas observadas, que de hecho es un cálculo simple. Pero, de manera práctica, se puede relacionar este ratio $\mathcal{M}$ a las frecuencias observadas del sistema:

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G}[\frac{5}{96}\pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f}]^{3/5} \tag{77}$$

Donde f y $\dot{f}$ son la frecuencia y su derivada temporal respectivamente. Esta relación ayuda a estudiar a mayor profundidad datos tanto como los de **PSR B1913+16** como los de la señal **GW150914** detectada el 14 de septiembre de 2015 por el laboratorio LIGO.

LIGO es la abreviación de 'Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory' y es un laboratorio estadounidense encargado de buscar señales de ondas gravitacionales mediante interferómetros de Michelson[17]. Para la señal de B1913+16 fueron utilizados dos interferómetros uno Handford Site y otro en Livingston, los cuales la detectaron a la hora 09:50 (UTC), lamentablemente el intererómetro Virgo, ubicado en Italia, no estaba en funcionamiento para detectar dicho suceso y así confirmar mejor la señal y estudiar mejor su origen y naturaleza[2]. Posteriores mediciones confirmaron que la señal observada provenía de un sistema binario de estrellas masivas, posiblemente agujeros negros.

En el año 2017 los físicos teóricos Reiner Weiss, Barry C. Barish y Kip S. Thorne fueron condecorados con el premio Nobel en física por sus contribuciones al estudio de ondas gravitacionales y al descubrimiento del laboratorio LIGO. [**?**] Este último fue uno de los grandes contribuyentes a la teoría de cuadrupolos en la radiación gravitacional[13].

7. Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo se logró estudiar la teoría básica relacionada a las ondas gravitacionales. Partiendo desde la base de la Relatividad general y las ecuaciones de Einstein se logró demostrar el comportamiento ondulatorio de una perturbación $h\mu\nu$ al ser insertada en una métrica $g_{\mu\nu}$, al igual que proponiendo soluciones para la ecuación de onda resultante. Por otro lado, se intentó dar una solución más específica para las velocidades en cada uno de los componentes usando la ecuación geodésica. Esta parte del trabajo necesitará trabajo futuro haciendo correcciones y adecuándolo a un modelo más adecuado donde se puedan observar mejor las propiedades cinéticas de la onda y del espacio en sí. También bajo los términos de lo estudiado acá, se pudo entender de mejor manera trabajos como los de Weber, a la par que se dio un vistazo superficial a lo relacionado con los logros experimentales en este campo. Por último, cabe resaltar la importancia de continuar este trabajo para generalizar este a métricas más complejas que las de Minkowski aplicando la perturbación a modelos inflacionarios del universo para entender mejor este fenómeno.

Referencias

[1] A. Einstein, “Über Gravitationswellen,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin*, pp. 154–167, Jan 1918.

[2] B. P. e. a. Abbott, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.

[3] R. S. Eamonn Bermingham, “Eleven year cosmic search leads to black hole rethink,” *CSIRO Press*, Sep 2015.

[4] J. Weber, “General relativity theory and experiments,” in *Contemporary Physics, Volume 1*, vol. 1, p. 533, Jan 1969.

[5] H. Billing, P. Kafka, K. Maischberger, F. Meyer, and W. Winkler, “Results of the Munich-Frascati gravitational-wave experiment,” *Nuovo Cimento Lettere*, vol. 12, pp. 111–116, Jan 1975.

[6] R. Hulse and J. Taylor, “Discovery of a pulsar in a binary system,” *The Astrophysical Journal*, vol. 195, no. 2.

[7] J. M. Weisberg, J. H. Taylor, and L. A. Fowler, “Gravitational waves from an orbiting pulsar,” *Scientific American*, vol. 245, pp. 74–82, Oct 1981.

[8] H. Minkowski, “Raum und Zeit,” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 18, pp. 75–88, Jan 1909.

[9] T. F. bach, *Allgemeine Relativitätstheorie.* Springer-Verlag, 6 ed., 2012.

[10] L. B. O. J. D. Jackson, “Historical roots of gauge invariance,” *Rev.Mod.Phys.73:663-680,2001*, Dec 2001.

[11] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics.* Pearson Education, Dorling Kindersley, 3 ed., 2007.

[12] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of the General theory of Relativity.* John Wiley Sons, inc., 1 ed., 1972.

[13] K. S. Thorne, "Multipole expansions of gravitational radiation," *Reviews of Modern Physics*, vol. 52, pp. 299–340, Apr. 1980.

[14] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 ed., 2007.

[15] D. Brand, "Astrophysicist Robert Brown, leader in telescope development, named to head NAIC and its main facility, Arecibo Observatory," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 21, Jan 2003.

[16] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, "A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16," , vol. 253, pp. 908–920, Feb. 1982.

[17] LIGO, "Introducción a LIGO y a las Ondas Gravitacionales," *Ligo Scitific Collaboration*, 2016.

[18] W. de Sitter, "On the curvature of space," *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, vol. 20, pp. 229–243, Jan 1918.

[19] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation.* W. H. Freeman, Princeton University Press, 1 ed., 1973.

[20] M. Maggiore, *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and experiments.* Oxford University Press, 1 ed., 2008.

[21] M. Maggiore, *Gravitational Waves, Volume 2: Astrophysics and Cosmology.* Oxford University Press, 1 ed., 2018.

[22] . O. D. Carroll, B, *Modern Astrophysics.* Addison-Wesley Pub, 1 ed., 1996.